

16. PÄDA MATHEMATIK SCHULOLYMPIADE 2022 | 2023

AUFGABE DER DRITTEN RUNDE | 5. & 6. KLASSE



Name: _____ Klasse: _____

Achtung! Die Lösung der Aufgabe sollt ihr uns - soweit ihr gekommen seid – mündlich präsentieren. Ihr habt für diese Lösungsvorstellung 5 Minuten Zeit und bekommt auch Hilfestellung, wenn ihr nicht weiterwisst.

Ihr habt nun 10 Minuten Bearbeitungszeit. Los geht's, viel Spaß beim Knobeln!

Der besondere Turmbau

Ihr seht vor euch einige Lochscheiben unterschiedlicher Größe sowie drei Stifte. Legt nun drei Lochscheiben so auf einen der drei Stifte, dass immer eine kleinere Scheibe auf einer größeren liegt:



Versucht nun, mit möglichst wenig Zügen alle drei Scheiben auf einen anderen Stift zu legen, mit anderen Worten: Den Turm abzutragen und an anderer Stelle neu aufbauen.

Dabei dürft ihr aber nur

- pro Zug eine Scheibe bewegen
- eine kleinere Scheibe auf eine größere Scheibe ablegen.

Natürlich dürft ihr für den Bau der neuen Pyramide die Scheiben sowohl auf die beiden leeren als auch wieder auf den Ausgangsstift umstecken. Aber dabei müsst ihr die Regeln beachten!

Wenn ihr die Lösung habt, startet mit vier und dann mit fünf Scheiben! Wie viele Züge braucht ihr jeweils?



Start mit vier Scheiben!

Start mit fünf Scheiben!

16. PÄDA MATHEMATIK SCHULOLYMPIADE 2022 | 2023

AUFGABE DER DRITTEN RUNDE | 5. & 6. KLASSE



Name: _____ Klasse: _____

Der besondere Turmbau

Turm von Hanoi (manchmal auch "Turm des Brahm" genannt)

Materialien für die Vorbereitung und Präsentation: Gebastelte Spiele (Einfachste Möglichkeit: Münzen/Pappe)

Lösungsdemonstration unter: <http://www.sachsen-freizeit.de/games/hanoi/hanoi.html>

Ergänzende Fragen:

- Gibt es ein systematisches Vorgehen, wenn der Turm wieder eine Scheibe mehr hat? Ja (Idee der Rekursion): Versetze bei n Scheiben zunächst den Turm aus $n-1$ Scheiben ohne die größte Grundscheibe auf einen leeren Stift, versetzte nun die Grundscheibe und anschließend den Turm aus $n-1$ Scheiben wieder auf diese Grundscheibe.
- Wie viele Züge werden benötigt bei 3, 4 und 5 Scheiben? Kann man die Anzahl der Züge für 6 Scheiben bestimmen? (Schwierig für Klasse 5)
3 Scheiben: 7 Züge; für 4 Scheiben $7E2+1=15$; für 5 insgesamt $15E2+1=31$ Züge;
Erklärung siehe oben: Rekursion.

Die Türme von Hanoi

Quelle: <http://www.blinde-kuh.de/spiele/hanoi/>

Doch kein Spiel für kleine Kinder? Ja, du kennst das vielleicht mit einem Turm, aber das Spiel kommt ganz woanders her, und ganz bestimmt nicht aus dem Babyzimmer, auch wenn es da irgendwie mit der Zeit gelandet ist. Also, lasse dir mal erzählen ...

16. PÄDA MATHEMATIK SCHULOLYMPIADE 2022 | 2023

AUFGABE DER DRITTEN RUNDE | 5. & 6. KLASSE



Name: _____ Klasse: _____

Die Geschichte von den Türmen aus Hanoi

1883 hatte der französische Mathematiker Edouard Lucas jene kleine Geschichte ersonnen, die fortan als die Geschichte der Türme von Hanoi selbst Geschichte machte:

Im Großen Tempel von Benares, unter dem Dom, der die Mitte der Welt markiert, ruht eine Messingplatte, in der drei Diamantnadeln befestigt sind, jede eine Elle hoch und so stark wie der Körper einer Biene. Bei der Erschaffung der Welt hat Gott vierundsechzig Scheiben aus purem Gold auf eine der Nadeln gesteckt, wobei die größte Scheibe auf der Messingplatte ruht, und die übrigen, immer kleiner werdend, eine auf der anderen. Das ist der Turm von Brahma. Tag und Nacht sind die Priester unablässig damit beschäftigt, den festgeschriebenen und unveränderlichen Gesetzen von Brahma folgend, die Scheiben von einer Diamantnadel auf eine andere zu setzen, wobei der oberste Priester nur jeweils eine Scheibe auf einmal umsetzen darf, und zwar so, dass sich nie eine kleinere Scheibe unter einer größeren befindet. Sobald dereinst alle vierundsechzig Scheiben von der Nadel, auf die Gott sie bei der Erschaffung der Welt gesetzt hat, auf eine der anderen Nadeln gebracht sein werden, werden der Turm samt dem Tempel und allen Brahmanen zu Staub zerfallen, und die Welt wird mit einem Donnerschlag untergehen.

Das Ende der Zeit sei erreicht, wenn all diese 64 Scheiben auf einer dieser Nadeln wieder nach diesen Regeln aufgebaut werden. Brahma ist ein Gott der Hindus. Wieso diese Türmchen dann später in Hanoi angesiedelt wurden, also in Vietnam, in den Geschichten meist auch mit weniger Scheiben, konnte ich nicht herausfinden, aber das ist ja auch egal.

Auf die Frage hin, ob der oberste Priester wüsste, wie denn die Scheiben zu setzen seien, soll der noch gesagt haben, dass nichts leichter sei als das. Er braucht ja nur die unterste Scheibe zu versetzen, wenn seine Schüler alle die darüber bereits versetzt haben, so dass die unterste frei werde. Dann können die Schüler, die nun wüssten, wie die anderen 63 Scheiben zu bewegen sind, diese wieder auf der untersten 64. Scheibe aufbauen und der Turm wäre versetzt.

Doch warum soll dann das Ende der Zeit einbrechen?

Auch das hat seinen Grund. Wenn für 3 Scheiben 7 Züge notwendig sind, für 4 bereits 15 und für 5 insgesamt 31 Züge, so wäre die Anzahl der Züge für 64 Scheiben wie folgt

$2^{64}-1$ und das sind: $2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot \dots$ (64 Zweien, die da miteinander malgenommen werden) -1
also 18.446.744.073.709.551.615 Züge

Wenn jede Scheibe innerhalb einer schlappen Sekunde umgesetzt wird, macht das an die 580 Milliarden Jahre. Kleiner Vergleich zum Mitdenken, unser Sonnensystem ist erst $4\frac{1}{2}$ Milliarden Jahre alt. Für gerade mal 5 Milliarden Jahre wird das Licht der Sonne noch reichen. Wer auch immer dann weiter die Scheiben umlegen möchte, er macht es dann im Dunkeln, bzw. nicht mehr in diesem Sonnensystem.

Lustig, das ist eine dieser mathematischen Aufgaben, die man zwar berechnen kann, aber nie erleben wird. 64 Scheiben umzusetzen würde reichlich lange dauern. Auch eine Computersimulation wird es nicht schaffen. Was nützt es da, 1000 mal in der Sekunde einige Scheiben rechnerisch bewegen zu können, auch das würde Jahrmillionen dauern.